Resolução das atividades complementares

Matemática

M1 — Trigonometria no ciclo

p. 7

1 Expresse:

a) 45° em radianos $\frac{\pi}{4}$ rad

b) 330° em radianos $\frac{11\pi}{6}$ rad

c) 225° em radianos $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) $\frac{\pi}{3}$ rad em graus 60°

e) $\frac{11\pi}{12}$ rad em graus 165°

f) $\frac{33\pi}{24}$ rad em graus 247° 30'

Resolução:

a) 180° ——— π rad

45° ——— x

$$\frac{180°}{45°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 45°}{180°} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) 180° ——— π rad

330° ——— x

$$\frac{180°}{330°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 330°}{180°} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

c) 180° ——— π rad

225° ——— x

$$\frac{180°}{225°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 225°}{180°} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

d) 180° ——— π rad

x ——— $\frac{\pi}{3}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} \rightarrow \pi x = 180° \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 60°$$

e) 180° ——— π rad

x ——— $\frac{11\pi}{12}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{11\pi}{12}} \rightarrow \pi x = 180° \cdot \frac{11\pi}{12} \rightarrow x = 165°$$

f) 180° ——— π rad

x ——— $\frac{33\pi}{24}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{33\pi}{24}} \rightarrow \pi x = 180° \cdot \frac{33\pi}{24} \rightarrow x = 247{,}5° = 247°\,30'$$

2 (Mackenzie-SP) O ponteiro dos minutos de um relógio mede 4 cm. Supondo $\pi = 3$, a distância, em centímetros, que a extremidade desse ponteiro percorre em 25 minutos é:

a) 15
b) 12
c) 20
d) 25
e) 10

Resolução:

Em 60 minutos o ponteiro dá uma volta, que é o comprimento da circunferência $C = 2\pi r$, em que $\pi = 3$ e $r = 4$.

60' ——— $2\pi r$
25' ——— x

$$x = \frac{2\pi r \cdot 25}{60} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25}{60} \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

3 Um arco de circunferência mede 210° e seu comprimento é 2 km. Qual a medida do raio em metros? Use $\pi = 3{,}14$. aproximadamente 546 m

Resolução:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{\ell}{r}$$

$\ell = 2 \text{ km} = 2\,000 \text{ m}$

180° ——— π rad
210° ——— x

$$x = \frac{210° \cdot \pi}{180°} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{2000}{r} \rightarrow r = \frac{6 \cdot 2000}{7\pi} \cong 545{,}9$$

A medida do raio é, aproximadamente, 546 metros.

4 Determine o comprimento de um arco de ângulo central 85°, cujo raio da circunferência é 5 cm. Use $\pi = 3{,}14$. aproximadamente 7,41 cm

Resolução:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{\ell}{r}$$

$r = 5 \text{ cm}$

180° ——— π rad
85° ——— x

$$x = \frac{85° \cdot \pi}{180°} = \frac{17\pi}{36} \text{ rad}$$

$$\frac{17\pi}{36} = \frac{\ell}{5} \rightarrow \ell = \frac{5 \cdot 17\pi}{36} \cong 7{,}41$$

O comprimento do arco é, aproximadamente, 7,41 cm.

5 Ao meio-dia, o ponteiro dos minutos de um relógio coincide com o ponteiro das horas. A que horas acontece a próxima coincidência? 13h 5min 27s

Resolução:

Em 3 600", o ponteiro das horas percorre 30°, e o dos minutos, 360°.

ponteiro das horas: 3 600" ——— 30°

x ——— α

$$\alpha = \frac{x}{120} \quad \text{(I)}$$

ponteiro dos minutos: 3 600" ——— 360°

x ——— 360° + α

$$x = \frac{3600 \cdot (360 + \alpha)}{360} \rightarrow x = 10 \cdot (360 + \alpha) \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$x = 10 \cdot \left(360 + \frac{x}{120}\right) \rightarrow x = 3600 + \frac{10x}{120} \rightarrow x - \frac{x}{12} = 3600 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12x - x}{12} = 3600 \rightarrow 11x = 43200 \rightarrow x = 3927''$$

$$\frac{3927}{60} = 65'\,27'' = 1\text{h}\,5'\,27''$$

Portanto, a próxima coincidência acontecerá às 13h 5min 27s.

6 Um circuito de *kart* tem uma pista circular de raio 500 m. Um piloto, para testar a pista e o *kart*, desenvolve uma velocidade constante de 80 km/h. Determine o número de voltas que ele deu na pista, após 15 minutos. 6,3 voltas

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 500 \rightarrow C = 3140$ m

Como a velocidade é 80 km/h, em 15 minutos ele andou $\frac{80}{4} = 20$ km $= 20000$ m.

número de voltas $= \frac{20\,000}{3\,140} = 6{,}3$

Após 15 minutos, o piloto deu 6,3 voltas na pista.

7 Ana pretende colocar renda em todo o perímetro de uma toalha circular de raio 1 m. Quantos metros de renda ela deve comprar? 6,30 m

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \rightarrow C = 6{,}28$ m

Ela deve comprar 6,30 metros de renda.

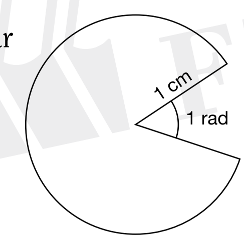
8 Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, qual a medida do comprimento da linha do equador? aproximadamente 40 003,6 km

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,370 \rightarrow C = 40\,003{,}6$ km

A linha do equador tem, aproximadamente, 40 003,6 km.

9 (Unesp-SP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 rad. O perímetro do "monstro", em centímetros, é:



a) $\pi - 1$

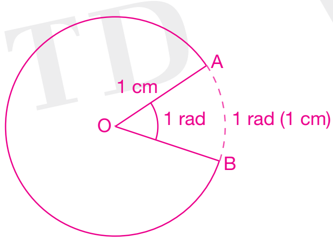
b) $\pi + 1$

c) $2\pi - 1$

d) 2π

e) $2\pi + 1$

Resolução:



O comprimento do arco menor $\overset{\frown}{AB}$ é 1 cm.

O perímetro do "monstro" é $p = 2\pi r - 1 + 1 + 1 = 2\pi + 1$.

10 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

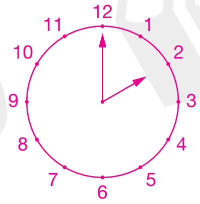
a) 2 h $60°$

b) 2h 15min $22° 30'$

c) 2h 50min $145°$

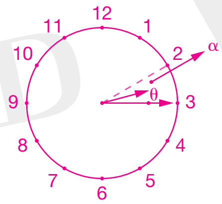
Resolução:

a) 2 h



Em 60' o ponteiro dos minutos percorre 360°, e o ponteiro das horas, 30°. Então, às 2 horas, o menor ângulo formado é $2 \cdot 30° = 60°$.

b) 2h 15min



Em 60' o ponteiro das horas percorre 30°; em 15', percorrerá:

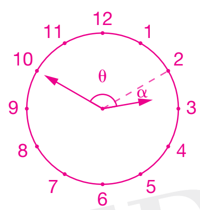
60' ———— 30°

15' ———— α

$$\alpha = \frac{15 \cdot 30}{60} \rightarrow \alpha = 7° 30$$

$\theta = 30° - \alpha = 30° - 7° 30' \rightarrow \theta = 22° 30'$

c) 2h 50min



Em 60' o ponteiro das horas percorre 30°; em 50', percorrerá:

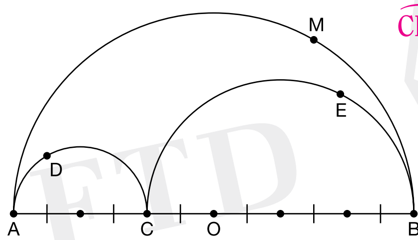
60' ———— 30°

50' ———— α

$$\alpha = \frac{50 \cdot 30}{60} \rightarrow \alpha = 25°$$

$\theta = 120° + \alpha = 120° + 25° \rightarrow \theta = 145°$

11 Na figura abaixo, os arcos $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{ADC}$ e $\overset{\frown}{CEB}$ têm, respectivamente, raios 30 cm, 10 cm e 20 cm. Determine os comprimentos desses arcos. O que podemos concluir? $\overset{\frown}{AMB} = 94{,}2$ cm; $\overset{\frown}{ADC} = 31{,}4$ cm e $\overset{\frown}{CEB} = 62{,}8$ cm



Resolução:

$$\text{arco } \overset{\frown}{AMB} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30}{2} = 94{,}2 \text{ cm}$$

$$\text{arco } \overset{\frown}{ADC} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}{2} = 31{,}4 \text{ cm}$$

$$\text{arco } \overset{\frown}{CEB} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{2} = 62{,}8 \text{ cm}$$

Podemos concluir que $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{CEB}$.

12 Um grado (1 gr) é um ângulo central que determina na circunferência um arco de comprimento igual a $\frac{1}{400}$ da circunferência. Quantos radianos tem um ângulo de 50 gr? $\frac{\pi}{4}$ rad

Resolução:

2π rad ———— 400 gr

x ———— 50 gr

$$x = \frac{50 \cdot 2\pi}{400} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

13 Um ciclista leva 5 minutos para dar uma volta numa pista circular de raio 150 m. Qual o comprimento da pista e qual a velocidade do ciclista em metros por minuto? 942 m e $v = 60\pi$ m/min

Resolução:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 \rightarrow C = 942 \text{ m}$$

$$v = \frac{s}{t} = 2\pi \cdot \frac{150}{5} \rightarrow v = 60\pi \text{ m/min}$$

14 Determine as medidas de x, em graus, associadas ao arco e a 45°, nas quatro primeiras voltas positivas. 45°, 405°, 765°, 1 125°

Resolução:

$x_1 = 45°$

$x_2 = 45° + 360° = 405°$

$x_3 = 45° + 720° = 765°$

$x_4 = 45° + 1\,080° = 1\,125°$

15 Determine as medidas de x, em radianos, associadas ao arco de $\frac{\pi}{8}$ nas três primeiras voltas negativas. $-\frac{\pi}{8}$, $-\frac{17\pi}{8}$, $-\frac{33\pi}{8}$

Resolução:

$x_1 = -\frac{\pi}{8}$

$x_2 = -\frac{\pi}{8} - 2\pi = -\frac{17\pi}{8}$

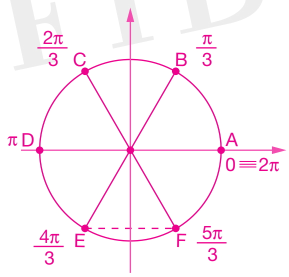
$x_3 = -\frac{\pi}{8} - 4\pi = -\frac{33\pi}{8}$

16 Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes a:
0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{3} = \pi$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{6\pi}{3} = 2\pi$.

a) Qual é o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem? $\frac{4\pi}{3}$

b) Qual é o simétrico de $\frac{4\pi}{3}$ em relação ao eixo das ordenadas? $\frac{5\pi}{3}$

Resolução:



a) O simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem é $\frac{4\pi}{3}$.

b) O simétrico de $\frac{4\pi}{3}$ em relação ao eixo das ordenadas é $\frac{5\pi}{3}$.

17 Seja o arco de expressão geral: $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a) Qual o valor da expressão para $k = 0$? $\alpha = \frac{\pi}{4}$

b) Qual o valor da expressão para $k = 7$? $\alpha = \frac{57\pi}{4}$

Resolução:

$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

a) $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

b) $k = 7 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 7 \cdot \pi = \frac{57\pi}{4}$

18 a) Escreva em graus a expressão geral dos arcos de 20°. $\alpha = 20° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) Qual é a imagem do arco se $k = -2$? $\alpha = -700°$

Resolução:

a) $\alpha = 20° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = 20° + 360° \cdot (-2) = -700°$

19 Em que quadrante se encontra a extremidade dos arcos de:

a) $-1\,690°$ 2º quadrante

b) $2\,490°$ 4º quadrante

c) $\frac{323\pi}{8}$ 1º quadrante

Resolução:

a) $-1\,690° = (-4) \cdot 360° - 250° \rightarrow$ a primeira determinação é igual a $-250°$, que se encontra no 2º quadrante.

b) $2\,490° = (6) \cdot 360° + 330° \rightarrow$ a primeira determinação é igual a 330°, que se encontra no 4º quadrante.

c) $\frac{323\pi}{8} = (20) \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{8} \rightarrow$ a primeira determinação é $\frac{3\pi}{8}$, que se encontra no 1º quadrante.

20 Descubra a primeira determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos congruentes ao arco de 2 310°. $\alpha = 150°$ e $\alpha = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 2310° & 360° \\ \cline{2-2} 150° & 6 \end{array}$$

$2\,310° = (6) \cdot 360° + 150°$

A primeira determinação é 150°.

$\alpha = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

21 Determine o raio do círculo percorrido por um ponto, sabendo que em uma volta e meia percorreu uma distância de 9,420 km. 1 km

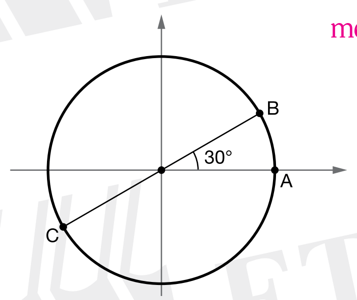
Resolução:

uma volta e meia $= 2\pi r + \pi r = 3\pi r = 9\,420$

$$r = \frac{9\,420}{3 \cdot 3{,}14} \rightarrow r = 1\,000 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

22 Determine a medida dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$, em radianos, sabendo que estão orientados no sentido horário.

med $(\overset{\frown}{AB}) = -\dfrac{11\pi}{6}$ e med $(\overset{\frown}{AC}) = -\dfrac{5\pi}{6}$



Resolução:

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{———} & 180° \\ x & \text{———} & 30° \end{array}$$

$$x = \frac{30\pi}{180} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Observando o sentido horário dos arcos, temos:

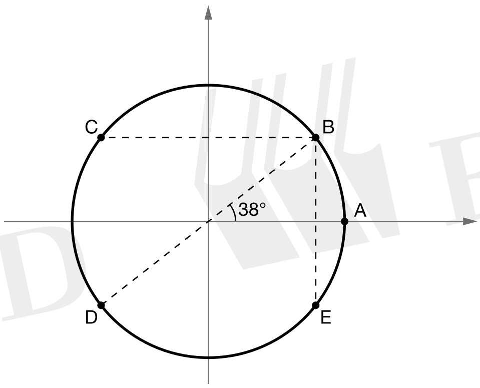
$$\text{med } (\overset{\frown}{AB}) = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

$$\text{med } (\overset{\frown}{AC}) = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

p. 11

23 Nas figuras a seguir, determine em graus os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{AE}$.

a)



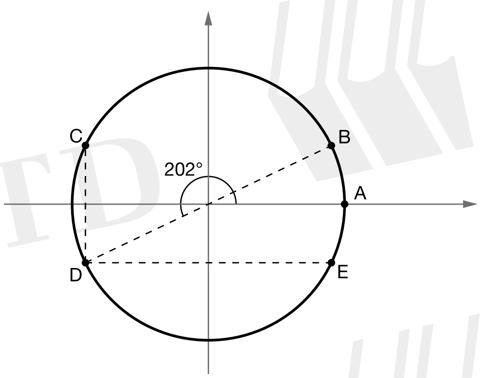
med $(\overset{\frown}{AB}) = 38°$

med $(\overset{\frown}{AC}) = 142°$

med $(\overset{\frown}{AD}) = 218°$

med $(\overset{\frown}{AE}) = 322°$

b)



med $(\overset{\frown}{AB}) = 22°$

med $(\overset{\frown}{AC}) = 158°$

med $(\overset{\frown}{AD}) = 202°$

med $(\overset{\frown}{AE}) = 338°$

Resolução:

a) med $(\overset{\frown}{AB}) = 38°$

med $(\overset{\frown}{AC}) = 180° - 38° = 142°$

med $(\overset{\frown}{AD}) = 180° + 38° = 218°$

med $(\overset{\frown}{AE}) = 360° - 38° = 322°$

b) med $(\overset{\frown}{AB}) = 202° - 180° = 22°$

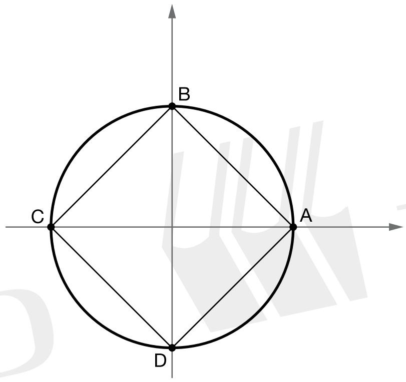
med $(\overset{\frown}{AC}) = 180° - 22° = 158°$

med $(\overset{\frown}{AD}) = 180° + 22° = 202°$

med $(\overset{\frown}{AE}) = 360° - 22° = 338°$

24 Os polígonos a seguir são quadrados. Determine em radianos os arcos correspondentes aos vértices.

a)

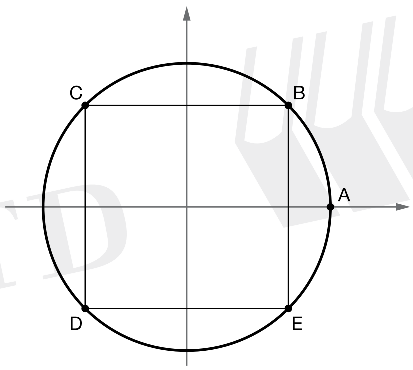


$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi}{2}$

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AC}) = \pi$

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AD}) = \frac{3\pi}{2}$

b)



$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi}{4}$

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AC}) = \frac{3\pi}{4}$

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AD}) = \frac{5\pi}{4}$

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AE}) = \frac{7\pi}{4}$

Resolução:

a) $\overset{\frown}{AB}$ é um arco de 90°, equivalente a $\frac{\pi}{2}$ rad; então:

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AC}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AD}) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

b) BD e CE são diagonais do quadrado; portanto, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 45° e os arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{DE}$ são arcos de 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad. Assim:

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AC}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AD}) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AE}) = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

25 Associe os valores da segunda coluna aos valores dos senos da primeira coluna:

a: 3, b: 4, c: 2, d: 5, e: 1, f: 6

a) sen 270° — 1. 0

b) cos 315° — 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos \frac{5\pi}{6}$ — 3. -1

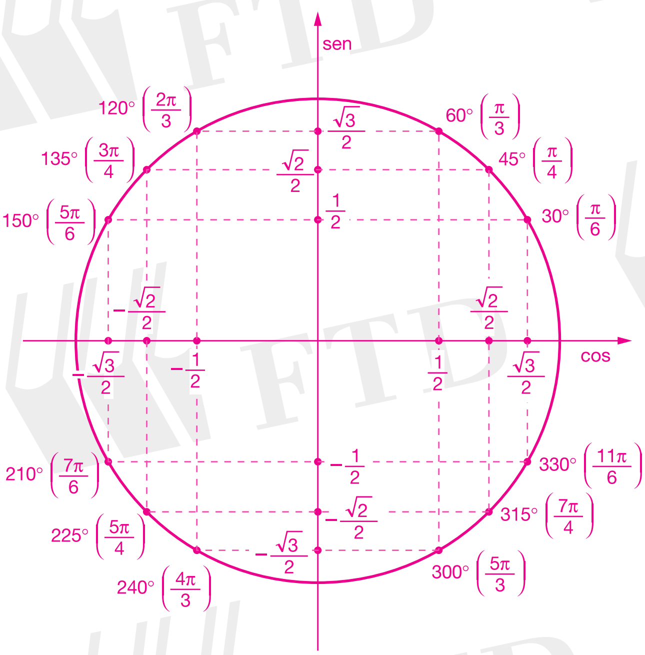
d) $\text{sen } \frac{7\pi}{6}$ — 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) sen 2π — 5. $-\frac{1}{2}$

f) cos 4π — 6. 1

Resolução:

Observando o ciclo trigonométrico abaixo com os ângulos e seus respectivos senos e cossenos, temos:



a) $\text{sen } 270° = -1$ (3)

b) $\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4)

c) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

d) $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (5)

e) $\text{sen } 2\pi = 0$ (1)

f) $\cos 4\pi = \cos 2\pi = 1$ (6)

26 Determine os valores de:

a) sen $\frac{19\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen 675° $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen 5π 0

d) sen 150° $\frac{1}{2}$

e) cos $\frac{2\pi}{3}$ $-\frac{1}{2}$

f) cos 1 305° $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) cos $\frac{3\pi}{2}$ 0

h) cos $1\,000\pi$ 1

Resolução:

a) $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{sen}\ \frac{19\pi}{4} = \text{sen}\ \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $675° = 360° + 315° \rightarrow \text{sen}\ 675° = \text{sen}\ 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $5\pi = \pi + 4\pi \rightarrow \text{sen}\ 5\pi = \text{sen}\ \pi = 0$

d) $\text{sen}\ 150° = \frac{1}{2}$

e) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $1\,305° = (3) \cdot 360° + 225° \rightarrow \cos 1\,305° = \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

h) $1\,000\pi = (500) \cdot 2\pi \rightarrow \cos 1\,000\pi = \cos 2\pi = 1$

27 Determine o valor da expressão: $A = \cos 10\pi + \text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ -1

Resolução:

$10\pi = (5) \cdot 2\pi \rightarrow \cos 10\pi = \cos 2\pi = 1$

$\frac{15\pi}{2} = (3) \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow \text{sen}\ \frac{15\pi}{2} = \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$

$\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$

$A = \cos 10\pi + \text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + (-1) - 1 = -1$

28 Calcule sen $(-60°)$ e cos $(-45°)$. $\text{sen}\,(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \rightarrow \text{sen}\,(-60°) = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \rightarrow \cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \text{sen}\,(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

29 Simplifique: $A = \text{sen}\,(11\pi - x) + \cos(7\pi + x)$, para $x = \frac{\pi}{3}$. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Resolução:

$11\pi = (5) \cdot 2\pi + \pi;\ 7\pi = (3) \cdot 2\pi + \pi;\ x = \frac{\pi}{3}$

$A = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow A = \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow A = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

30 Se $\alpha + \beta = 270°$ e $\alpha - \beta = 210°$, determine o valor de $\cos\alpha + \cos\beta$. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Resolução:

$$\begin{cases} \alpha + \cancel{\beta} = 270° \\ \alpha - \cancel{\beta} = 210° \end{cases}$$

$2\alpha = 480° \rightarrow \alpha = 240°$

Substituindo α, temos:

$\alpha + \beta = 270° \rightarrow 240° + \beta = 270° \rightarrow \beta = 30°$

Então: $\cos 240° + \cos 30° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

31 Se $\alpha = 1380°$, determine o valor de $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução:

$1380° = (3) \cdot 360° + 300°$

$$\text{sen}\,300° \cdot \cos 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\ \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

32 Calcule o valor da expressão: $A = \dfrac{\text{sen}\,5x + \cos 10x}{\text{sen}\,9x}$, para $x = 30°$. -1

Resolução:

$$A = \frac{\text{sen}\,5x + \cos 10x}{\text{sen}\,9x} = \frac{\text{sen}\,5 \cdot 30 + \cos 10 \cdot 30}{\text{sen}\,9 \cdot 30} \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{\text{sen}\,150° + \cos 300°}{\text{sen}\,270°} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{-1} \rightarrow A = -1$$

33 Se $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{18} = a$, qual o sinal de *a*? Qual o valor do $\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{18}$ em função de *a*? *a* é positivo e $\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{18} = a$.

Resolução:

π ——— $180°$

$\frac{5\pi}{18}$ ——— x

$$\frac{\pi}{\frac{5\pi}{18}} = \frac{180}{x} \rightarrow x = \frac{180 \cdot \frac{5\pi}{18}}{\pi} \rightarrow x = 50°$$

Portanto, é um ângulo do primeiro quadrante e seu seno é positivo.

Se $\dfrac{13\pi}{18} = \pi - \dfrac{5\pi}{18}$ e $\text{sen}\,x = \text{sen}\,(\pi - x)$, então:

$$\text{sen}\,\frac{5\pi}{18} = \text{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{18}\right) = \text{sen}\,\frac{13\pi}{18} = a$$

Então, *a* é positivo e $\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{18} = a$.

34 Se $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, determine:

a) $\text{sen } (\pi - x)$ $\frac{1}{3}$

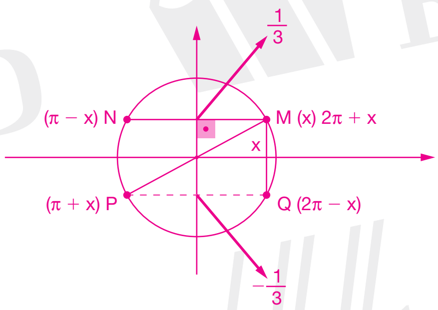
b) $\text{sen } (\pi + x)$ $-\frac{1}{3}$

c) $\text{sen } (2\pi - x)$ $-\frac{1}{3}$

d) $\text{sen } (2\pi + x)$ $\frac{1}{3}$

Resolução:

Observando o ciclo trigonométrico abaixo, temos:



a) $\text{sen } (\pi - x) = \frac{1}{3}$

b) $\text{sen } (\pi + x) = -\frac{1}{3}$

c) $\text{sen } (2\pi - x) = -\frac{1}{3}$

d) $\text{sen } (2\pi + x) = \frac{1}{3}$

35 (Unesp-SP – modificado) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão: $h(t) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, em que o tempo é dado em segundos e a medida angular em radianos. A que altura seu amigo se encontrava do solo quando a roda começou a girar ($t = 0$)? 6,5 m

Resolução:

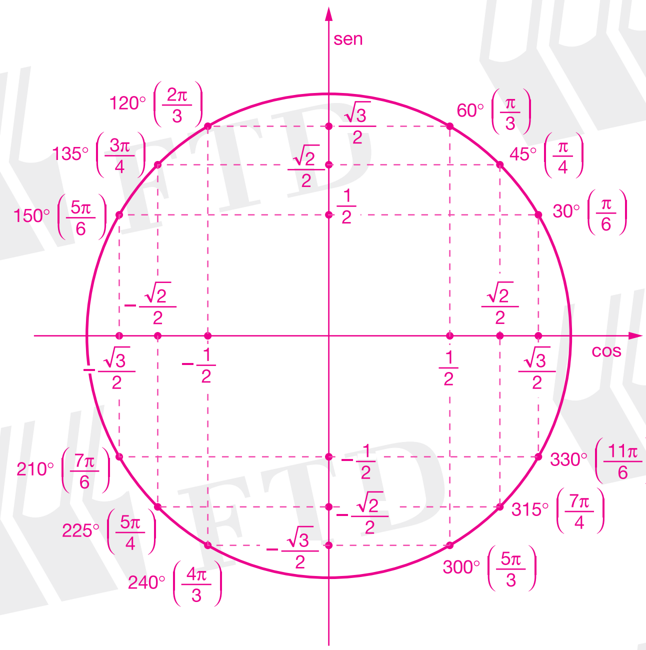
$h(t) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12} \cdot (t - 26)\right]$

$h(0) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12} \cdot (0 - 26)\right] \rightarrow h(0) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[-\frac{13\pi}{6}\right] \rightarrow$

$\rightarrow h(0) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[-\frac{\pi}{6}\right] = 11{,}5 - 5 = 6{,}5 \text{ m}$

36 Para que valores de x temos $\text{sen } x = \cos x$, se $0° \leqslant x < 360°$? 45° e 225°

Resolução:



Pelo ciclo trigonométrico, podemos concluir que $\text{sen } x = \cos x$, para $x = 45°$ e para $x = 225°$.

37 O fenômeno da maré em determinado ponto da costa brasileira pode ser obtido pela expressão:
$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + \frac{5\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo decorrido após o início da operação ($t = 0$), e $P(t)$ é a profundidade da água no instante t. Qual é a profundidade da água no início da operação? 9 m

Resolução:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow P(0) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 + \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(0) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow P(0) = 9{,}0$$

A profundidade da água no início da operação é 9 metros.

38 Construa o gráfico das funções a seguir, dando o domínio, a imagem e o período.

a) $y = 2 - \cos x$ b) $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $y = \left|3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

Resolução:

a) $y = 2 - \cos x$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

x	cos x	2 − cos x
0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	2
π	−1	3
$\frac{3\pi}{2}$	0	2
2π	1	1

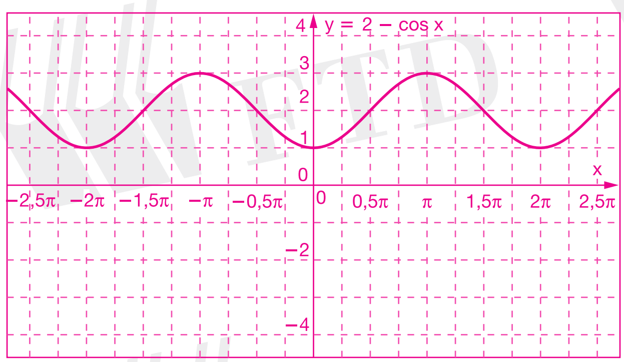
1º quadrante → crescente

2º quadrante → crescente

3º quadrante → decrescente

4º quadrante → decrescente

Esboçando o gráfico da função, temos:



$D = \mathbb{R}$

$Im(f) = [1, 3]$

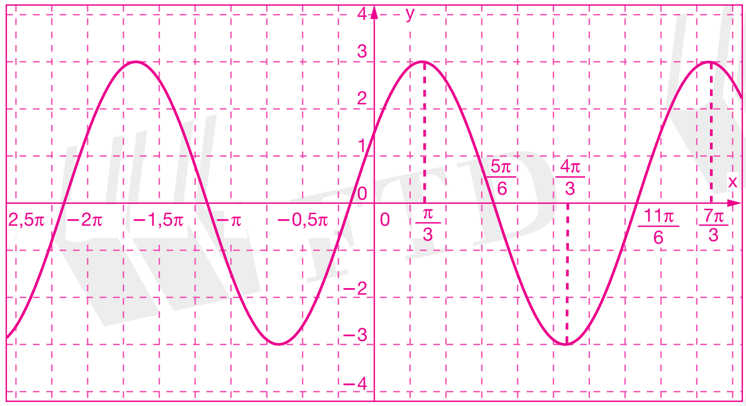
$P = 2\pi$

b) $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x - \frac{\pi}{3}$	x	$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
0	$\frac{\pi}{3}$	1	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	0	0
π	$\frac{4\pi}{3}$	−1	−3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	0	0
2π	$\frac{7\pi}{3}$	1	3

Esboçando o gráfico da função, temos:



$D = \mathbb{R}$

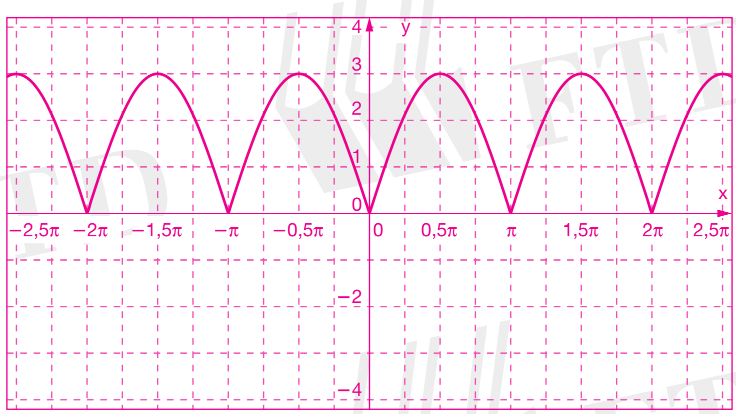
$Im(f) = [-3, 3]$

$P = 7\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$

c) $y = \left|3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x + \frac{\pi}{2}$	x	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\left\|3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\|$
0	$-\frac{\pi}{2}$	1	3	3
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	−1	−3	3
$\frac{3\pi}{2}$	π	0	0	0
2π	$\frac{3\pi}{2}$	1	3	3



$D = \mathbb{R}$

$Im(f) = [0, 3]$

$P = \pi$

39 Determine o período da função: $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. $p = 4\pi$

Resolução:

$f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqslant \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leqslant 2\pi \rightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{10\pi}{3}$

$p = \frac{10\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} \rightarrow p = 4\pi$

40 Seja a função real $f(x) = 2 \cos ax$. Qual o valor de *a* para que o período dessa função seja 6π? $a = \frac{1}{3}$

Resolução:

$f(x) = 2 \cos ax$

$0 \leqslant ax \leqslant 2\pi \rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{a}$

$p = \frac{2\pi}{a} - 0 \rightarrow p = \frac{2\pi}{a}$

$p = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{a} = 6\pi \rightarrow a = \frac{1}{3}$

41 (FGV-SP) Para que valores de *m*, a equação na incógnita *x*, $2 \text{ sen } x - 1 = 3m$, admite solução?
$-1 \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}$

Resolução:

$2 \text{ sen } x - 1 = 3m$

$\text{sen } x = \frac{3m + 1}{2}$

Como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, então:

$-1 \leqslant \frac{3m + 1}{2} \leqslant 1 \rightarrow -2 \leqslant 3m + 1 \leqslant 2 \rightarrow -3 \leqslant 3m \leqslant 1 \rightarrow -1 \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}$

42 Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \frac{1}{1 - \text{sen } x}$. Qual é o domínio da função no intervalo $[0, 2\pi]$?

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$

Resolução:

$1 - \text{sen } x \neq 0 \to \text{sen } x \neq 1 \to x \neq \frac{\pi}{2}$

Então, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$.

43 Qual é a imagem da função $f(x) = -2 + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$? $Im = [-5, 1]$

Resolução:

$-1 \leqslant \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$

$-3 \leqslant 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3$

$-2 - 3 \leqslant -2 + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -2 + 3$

$-5 \leqslant -2 + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$

$Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant y \leqslant 1\} = [-5, 1]$

44 Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cos x$. Considere as afirmações:

I. f(x) é uma função par.
II. f(x) é uma função periódica de período 2π.
III. A imagem de $f(x) = [-1, 1]$.

Podemos afirmar que:

a) I e II são verdadeiras, e III é falsa.
b) I é falsa, e II e III são verdadeiras.
c) I e III são verdadeiras, e II é falsa.
d) todas são verdadeiras.
e) todas são falsas.

Resolução:

I. (Verdadeira) $\to 2 \cos x = 2 \cos (-x)$; portanto, a função é par.
II. (Verdadeira) $\to 2 \cos x = 2 \cos (x + 2k\pi)$; então, $p = 2\pi$.
III. (Falsa) $\to -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \to -2 \leqslant 2 \cos x \leqslant 2 \to Im(f) = [-2, 2]$

45 O custo de x dezenas de certo produto é dado pela função: $C(x) = 3 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ em milhares de reais. Qual é o valor do custo mínimo desses produtos? Quantas dezenas podem ser fabricadas por esse custo? 2 000 reais; 1,5 dezena

Resolução:

$-1 \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \leqslant 1$

Portanto, o valor máximo de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ é 1, e o custo só será mínimo quando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ for máximo.

$C(x) = 3 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$C(x) = 3 - 1 = 2 \rightarrow$ o valor do custo mínimo é 2 000 reais.

$2 = 3 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 1 \rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

O custo mínimo desses produtos é R$ 2 000,00 e pode ser fabricada 1,5 dezena por esse custo.

46 Se $\text{sen}\,x > \text{sen}\,y$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ e ainda $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, podemos afirmar que:

a) $x = y$

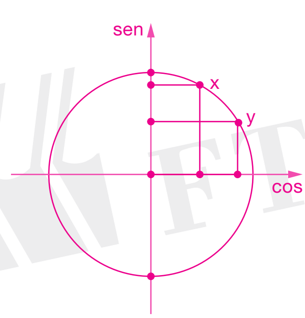
b) $x < y$

c) $\text{sen}\,x < 0$

d) $\cos x < \cos y$

e) $\cos x$, $\text{sen}\,y < 0$

Resolução:



No ciclo acima verificamos que se $\text{sen}\,x > \text{sen}\,y$, então: $x > y$ e $\cos y > \cos x$.

47 A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$ é:

a) decrescente para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$

b) crescente para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$

c) decrescente para $0 \leqslant x \leqslant 6\pi$

d) crescente para $0 \leqslant x \leqslant 6\pi$

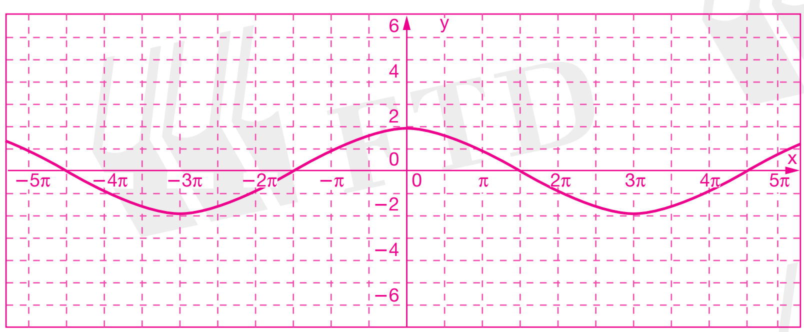
e) crescente para $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3\pi$

Resolução:

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$\frac{x}{3}$	x	$\cos\frac{x}{3}$	$2\cos\frac{x}{3}$
0	0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	0
π	3π	-1	-2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	0	0
2π	6π	1	2

Esboçando o gráfico da função, temos:



Portanto, a resposta certa é a alternativa *a*, pois a função é decrescente para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

48 O valor máximo da função $f(x) = 3 \text{ sen } \frac{x}{2}$ é:

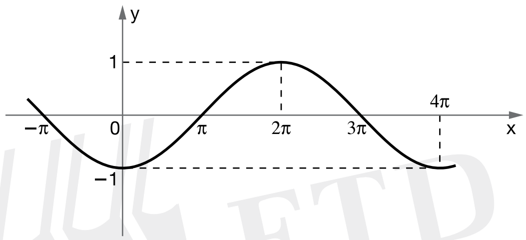
a) 3
b) 2
c) 1
d) −1
e) 0

Resolução:

$-1 \leqslant \text{sen } \frac{x}{2} \leqslant 1 \rightarrow -3 \leqslant 3 \text{ sen } \frac{x}{2} \leqslant 3$

Portanto, o valor máximo é 3.

49 A figura a seguir representa o gráfico da função $y = a \cos bx$.



Os valores de *a* e *b* são, respectivamente:

a) −1 e 2
b) −1 e 1
c) -1 e $\frac{1}{2}$
d) 1 e 2
e) 1 e $\frac{1}{2}$

Resolução:

Observando o gráfico, temos:

Se $bx = 0 \rightarrow x = 0$

Se $bx = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{b}$

$p = \frac{2\pi}{b} - 0 = \frac{2\pi}{b} = 4\pi \rightarrow b = 2$

Como a imagem da função é $[-1, 1]$, então $a = 1$.

50 (ITA-SP) Sejam *f* e *g* duas funções definidas por:

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\,\text{sen}\,x\,-\,1} \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,\text{sen}^2 x\,-\,1}, x \in \mathbb{R}$$

A soma do valor mínimo de *f* com o valor mínimo de *g* é igual a:

a) 0

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

Resolução:

$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\,\text{sen}\,x\,-\,1}$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,\text{sen}^2 x\,-\,1}$

f será mínimo se sen x = −1, e *g* será mínimo se $\text{sen}^2 x = 1$.

$f_{min} = \left(\sqrt{2}\right)^{-3\,-\,1} = \frac{1}{4}$

$g_{min} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,-\,1} = \frac{1}{4}$

$f_{min} + g_{min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

51 (FGV-SP) Considere a função $f(x) = 2 - \frac{3\cos^2 x}{4}$. Os valores máximo e mínimo de f(x) são, respectivamente:

a) 1 e −1

b) 1 e 0

c) 2 e $-\frac{3}{4}$

d) 2 e 0

e) 2 e $\frac{5}{4}$

Resolução:

$f(x) = 2 - \frac{3\cos^2 x}{4}$

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \rightarrow 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \rightarrow 0 \leqslant 3\cos^2 x \leqslant 3 \rightarrow 0 \leqslant \frac{3}{4}\cos^2 x \leqslant \frac{3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow 0 \geqslant -\frac{3}{4}\cos^2 x \geqslant -\frac{3}{4} \rightarrow 2 \geqslant 2 - \frac{3}{4}\cos^2 x \geqslant 2 - \frac{3}{4} \rightarrow 2 \geqslant 2 - \frac{3}{4}\cos^2 x \geqslant \frac{5}{4}$

Portanto, o valor máximo é 2, e o valor mínimo é $\frac{5}{4}$.

p. 28

52 Determine os valores de:

a) $\text{tg}\,(-420°)$ $-\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,420°$ $\sqrt{3}$

c) $\text{tg}\,4\,000\pi$ 0

d) $\text{tg}\,7\,001\pi$ 0

e) $\text{tg}\,\dfrac{15\pi}{6}$ não existe

Resolução:

a) $\text{tg}\,(-420°) = \text{tg}\,(-60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

$\text{tg}\,(-420°) = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,420° = \text{tg}\,60° \rightarrow \text{tg}\,420° = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\,4\,000\pi = \text{tg}\,2\pi \rightarrow \text{tg}\,4\,000\pi = 0$

d) $\text{tg}\,7\,001\pi = \text{tg}\,\pi \rightarrow \text{tg}\,7\,001\pi = 0$

e) $\text{tg}\,\dfrac{15\pi}{6} = \text{tg}\,\dfrac{5\pi}{2} = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{2}$ (não existe)

53 Dê o sinal dos números:

a) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6}$ positivo

b) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3}$ positivo

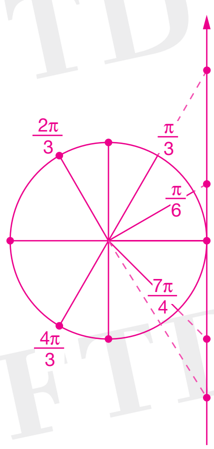
c) $\text{tg}\,\dfrac{2\pi}{3}$ negativo

d) $\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{3}$ positivo

e) $\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{4}$ negativo

Resolução:

Observe, no ciclo, os valores das tangentes dos referidos arcos:



Então:

a) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

b) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

c) $\text{tg}\,\dfrac{2\pi}{3} < 0 \rightarrow$ sinal negativo

d) $\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{3} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

e) $\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{4} < 0 \rightarrow$ sinal negativo

54 Qual é o domínio da função $y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$? $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

$3x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

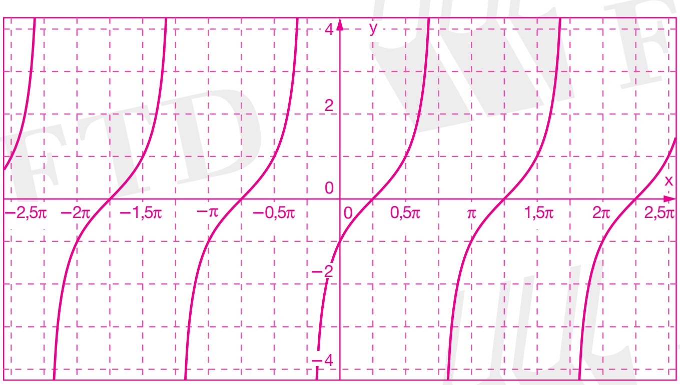
55 Esboce o gráfico e dê o domínio, a imagem e o período da função $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução:

Fazendo uma tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x - \frac{\pi}{4}$	x	$\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	não existe
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	não existe
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0

Esboçando o gráfico da função, temos:



$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$p = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$

56 Se $\text{tg } x = \dfrac{m + 5}{m - 3}$, para que valores de *m* existe essa função? $m \neq 3$

Resolução:

A única restrição para *m*, neste caso, é que o denominador seja diferente de zero; portanto, $m \neq 3$.

57 Determine $A = \text{sen}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x) + \text{tg}(\pi - x) \cdot \text{tg}(\pi + x)$, para $x = \dfrac{\pi}{4}$. $-\dfrac{3}{2}$

Resolução:

$A = \text{sen}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x) + \text{tg}(\pi - x) \cdot \text{tg}(\pi + x); \; x = \dfrac{\pi}{4}$

$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg } x$

$\text{tg}(\pi + x) = \text{tg } x$

Então:

$$A = \text{sen } \frac{\pi}{4} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\text{tg } \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\text{tg } \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1) \cdot (1) \rightarrow A = -\frac{1}{2} - 1 \rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

58 Resolva as expressões:

a) $A = 3 \text{ tg } \dfrac{\pi}{4} + \text{tg } 2\pi$ $\quad 3$

b) $B = \text{tg}^2 \dfrac{5\pi}{6} + \text{tg}^2 \dfrac{2\pi}{3}$ $\quad \dfrac{10}{3}$

Resolução:

a) $\text{tg } \dfrac{\pi}{4} = 1$

$$A = 3 \text{ tg } \frac{\pi}{4} + \text{tg } 2\pi \rightarrow A = 3 \cdot 1 + 0 \rightarrow A = 3$$

b) $\text{tg } \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \; \text{tg } \dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$$B = \text{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \text{tg}^2 \frac{2\pi}{3} \rightarrow B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 \rightarrow B = \frac{3}{9} + 3 \rightarrow B = \frac{10}{3}$$

59 Se f(x) = tg x, para que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, temos f(x) = 1? $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Resolução:

Para $x \in [0, 2\pi]$, tg x = 1; para $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

60 Qual o período da função real $y = \text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$? $\frac{\pi}{2}$

Resolução:

A função tg tem período π, então:

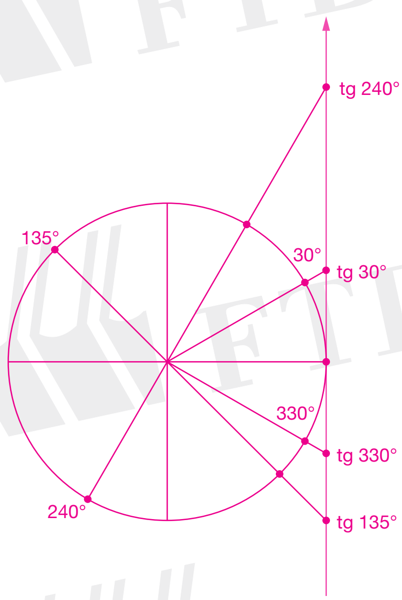
$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \text{ e } 2x + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$p = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow p = \frac{\pi}{2}$$

61 Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque-os em ordem crescente: tg 30°, tg 135°, tg 240° e tg 330°. tg 135° < tg 330° < tg 30° < tg 240°

Resolução:

Com os dados, temos:



Então, tg 135° < tg 330° < tg 30° < tg 240°.

62 Resolva as equações no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x = 1$ $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $\cos x = 0$ $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $\text{tg } x = 1$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

d) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $\text{tg } x = 0$ $S = \{0, \pi\}$

Resolução:

a) $\text{sen } x = 1$

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $\cos x = 0$

$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou

$\cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $\text{tg } x = 1$

$\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou

$\text{tg } x = \left(\text{tg } \frac{\pi}{4} + \pi\right) \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

d) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ ou

$\text{sen } x = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{11\pi}{6} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \rightarrow S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $\text{tg } x = 0$

$\text{tg } x = \text{tg } 0 \rightarrow x = 0$ ou

$\text{tg } x = \text{tg } \pi \rightarrow x = \pi \rightarrow S = \{0, \pi\}$

63 Resolva as equações reais.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\operatorname{sen} x = -4$ $\quad S = \{\ \}$

e) $\cos x = 3$ $\quad S = \{\ \}$

Resolução:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \to x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi = +2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \to x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) $\operatorname{sen} x = -4$; não existe x tal que $\operatorname{sen} x = -4$, pois $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$.
$S = \{\ \}$

e) $\cos x = 3$; não existe x tal que $\cos x = 3$, pois $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
$S = \{\ \}$

64 Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x = -1$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\therefore\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

65 Determine o conjunto verdade da equação $2\,\text{sen}^2\,x = 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Resolução:

$$2\,\text{sen}^2\,x = 1;\ 0 \leqslant x < 2\pi$$

$$\text{sen}^2\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{sen}\,x = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Se sen}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{sen}\,x = \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

66 Determine a soma das raízes da equação $\text{tg}^2\,x = 3$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. 4π

Resolução:

$$\text{tg}^2\,x = 3;\ 0 \leqslant x < 2\pi$$

$$\text{tg}^2\,x = 3 \rightarrow \text{tg}\,x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Se tg}\,x = \sqrt{3} \rightarrow \text{tg}\,x = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Se tg}\,x = -\sqrt{3} \rightarrow \text{tg}\,x = \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{soma} = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 4\pi$$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

67 Resolva a equação $2 \text{ sen } 2x = -1$ no conjunto dos números reais.

Resolução:

$2 \text{ sen } 2x = -1$

$\text{sen } 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } 2x = \text{sen } \frac{7\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ ou

$2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

68 Resolva a equação $2 \cos 2x = 1$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$2 \cos 2x = 1;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

$\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x' = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x'' = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

69 Resolva a equação cos 4x = cos 2x, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$\cos 4x = \cos 2x;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$4x = \pm 2x + 2k\pi$

$$4x = 2x + 2k\pi \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x' = k\pi \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = 1 \rightarrow x = \pi \\ k = 2 \rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$4x = -2x + 2k\pi \rightarrow 6x = 2k\pi \rightarrow x'' = \frac{k\pi}{3} \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 2 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ k = 3 \rightarrow x = \pi \\ k = 4 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ k = 5 \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \\ k = 6 \rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$\therefore S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

70 Resolva a equação trigonométrica $(4 \text{ sen}^2 x - 2) \cdot (2 \cos x - 1) = 0$, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Resolução:

$\cos 4x = \cos 2x;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$(4 \text{ sen}^2 x - 2) \cdot (2 \cos x - 1) = 0$, temos: $4 \text{ sen}^2 x - 2 = 0$ ou $2 \cos x - 1 = 0$.

Se $4 \text{ sen}^2 x - 2 = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$, e $\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4};\ x = \frac{3\pi}{4};\ x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

Se $2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2};\ x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

71 Resolva a equação sen x · cos x − sen x − cos x + 1 = 0 em $\mathbb{R}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução:

$\text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x - \cos x + 1 = 0$

$\text{sen } x \cdot (\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0$

$(\text{sen } x - 1) \cdot (\cos x - 1) = 0 \rightarrow \text{sen } x - 1 = 0$ ou $\cos x - 1 = 0$

Se $\text{sen } x - 1 = 0 \rightarrow \text{sen } x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Se $\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$

$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

72 Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $2\,\text{sen}^3 x - 7\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen } x = 0$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução:

$2\,\text{sen}^3 x - 7\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen } x = 0$

$\text{sen } x \cdot (2\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen } x + 3) = 0 \ \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 2\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen } x + 3 = 0 \end{cases}$ ou

Se $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = k\pi$

Se $2\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen } x + 3 = 0 \rightarrow \text{sen } x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$ $\begin{cases} \text{sen } x = 3 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

73 Calcule a soma das raízes da equação $\left(tg^2\, x - \frac{1}{3}\right) \cdot (sen\, x - 1) = 0$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $\frac{9\pi}{2}$

Resolução:

$$\left(tg^2\, x - \frac{1}{3}\right) \cdot (sen\, x - 1) = 0;\ 0 \leqslant x < 2\pi$$

$$\left(tg^2\, x - \frac{1}{3}\right) \cdot (sen\, x - 1) = 0 \rightarrow tg^2\, x - \frac{1}{3} = 0 \text{ ou } sen\, x - 1 = 0$$

$$\text{Se } tg^2\, x - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow tg\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{Se } sen\, x - 1 = 0 \rightarrow sen\, x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Então, as raízes são: $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{soma} = \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

74 Resolva o sistema $\begin{cases} \cos(x + y) = -1 \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. $\left\{\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

Resolução:

$$\begin{cases} \cos(x + y) = -1 \rightarrow \cos(x + y) = \cos \pi \rightarrow x + y = \pi \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \cancel{y} = \pi \\ x - \cancel{y} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Substituindo x, temos:

$$\frac{3\pi}{4} + y = \pi \rightarrow y = -\frac{3\pi}{4} + \pi \rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore S = \left\{\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

75 (Unesp-SP) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de Ciências Exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right),$$

em que *t* é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação (t = 0) e P(t) é a profundidade da água (em metros) no instante *t*.

Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$. $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{9}{2} + 12k,\ k \in \mathbb{N}\right\}$

Resolução:

$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1;\ t > 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos 2\pi \rightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4} = 2\pi + 2k\pi$

$\frac{t}{6} + \frac{5}{4} = 2 + 2k \rightarrow \frac{2t + 15}{12} = \frac{12 \cdot (2 + 2k)}{12} \rightarrow 2t = 24 + 24k - 15 \rightarrow$

$\rightarrow t = \frac{9 + 24k}{2} \rightarrow t = \frac{9}{2} + 12k$

$S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{9}{2} + 12k,\ k \in \mathbb{N}\right\}$

p. 37

76 Calcule cotg x, sec x e cossec x para:

a) $x = \frac{\pi}{4}$ $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$

b) $x = 150°$ $-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2$

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{4}$

$\text{cotg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} \rightarrow \text{cotg}\,x = 1$

$\sec\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \sec x = \sqrt{2}$

$\text{cossec}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \text{cossec}\,x = \sqrt{2}$

b) $x = 150°$

$\text{cotg}\,150° = \frac{1}{\text{tg}\,150°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \rightarrow \text{cotg}\,150° = -\sqrt{3}$

$\sec 150° = \frac{1}{\cos 150°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sec 150° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{cossec}\,150° = \frac{1}{\text{sen}\,150°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{cossec}\,150° = 2$

77 Seja $x = \frac{\pi}{6}$. Determine os valores de:

a) $\text{sen } x$ $\frac{1}{2}$

b) $\cos x$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg } x$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{cotg } x$ $\sqrt{3}$

e) $\sec x$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{cossec } x$ 2

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{6}$

$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$

b) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{cotg } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\text{tg } \frac{\pi}{6}} \rightarrow \text{cotg } x = \sqrt{3}$

e) $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{cossec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{cossec } x = 2$

78 Determine o domínio da função real: $y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 Para que valores de *x* existe a função $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$?

Resolução:

$y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

$3x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3x \neq \pi + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{3}(1 + k), k \in \mathbb{Z}$

A função existe para $x \neq \frac{\pi(1 + k)}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

83 Qual o sinal de $f(x) = \text{sen } x \cdot (-\sec x)$ no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$? positivo

Resolução:

$f(x) = \text{sen } x \cdot (-\sec x); \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

$f(x) = \text{sen } x \cdot \left(-\frac{1}{\cos x}\right) = -\text{tg } x$

A função tangente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ é negativa; então, f(x) é positiva.

84 Determine o sinal do produto: $A = \text{tg } 122° \cdot \sec 213° \cdot \text{cossec}^2\ 317°$. positivo

Resolução:

$\text{tg } 122° < 0$

$\sec 213° = \frac{1}{\cos 213°} < 0$

$\text{cossec}^2\ 317° > 0$

$A = \text{tg } 122° \cdot \sec 213° \cdot \text{cossec}^2\ 317° > 0$

Então, o sinal do produto é positivo.

85 Resolva a expressão: $A = 5\ \text{cossec}^2 \frac{17\pi}{4} \cdot \text{cotg } \frac{21\pi}{4} - 4 \sec 10\pi \cdot \text{cotg}^2 \frac{2\pi}{3}$. $\frac{26}{3}$

Resolução:

$A = 5\ \text{cossec}^2 \frac{17\pi}{4} \cdot \text{cotg } \frac{21\pi}{4} - 4 \sec 10\pi \cdot \text{cotg}^2 \frac{2\pi}{3}$

$\text{cossec } \frac{17\pi}{4} = \text{cossec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \rightarrow \text{cossec}^2 \frac{17\pi}{4} = 2$

$\text{cotg } \frac{21\pi}{4} = \text{cotg } \frac{\pi}{4} = 1$

$\sec 10\pi = \sec 2\pi = \frac{1}{\cos 2\pi} = 1$

$\text{cotg } \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{cotg}^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$

$A = 5 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 10 - \frac{4}{3} \rightarrow A = \frac{26}{3}$

$S = \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

86 Considere a função $f(x) = x^3 - x \operatorname{cossec}^2 \alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Resolução:

$f(x) = x^3 - x \operatorname{cossec}^2 \alpha$

$x^3 - x \operatorname{cossec}^2 \frac{\pi}{3} = 0$

$x\left(x^2 - \operatorname{cossec}^2 \frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S = \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

87 Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

88 Resolva a equação $\operatorname{cossec} x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \{\ \}$

Resolução:

$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = 2$ (não existe x que satisfaça essa condição)

$S = \{\ \}$

89 Resolva a equação $\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sec x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sec x = 0$

$\sec x \left(\sec x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \rightarrow \sec x = 0$ (não existe) ou

$\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{1}{\cos x} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

$\therefore S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

p. 40

90 Se $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine as demais funções trigonométricas.

$\cos x = -\frac{\sqrt{33}}{6}$, $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{11}}{11}$, $\text{cotg } x = -\sqrt{11}$, $\sec x = -\frac{2\sqrt{33}}{11}$, $\text{cossec } x = 2\sqrt{3}$

Resolução:

$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{6} \rightarrow$ *x* pertence ao segundo quadrante.

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} \rightarrow$ no segundo quadrante, cos *x* é negativo.

$\cos x = -\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{36}} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{33}}{6}$

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{-\frac{\sqrt{33}}{6}} \rightarrow \text{tg } x = -\frac{\sqrt{11}}{11}$

$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} \rightarrow \text{cotg } x = -\sqrt{11}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\frac{6}{\sqrt{33}} \rightarrow \sec x = -\frac{2\sqrt{33}}{11}$

$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{6}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{cossec } x = 2\sqrt{3}$

91 Sabendo que $\text{sen}\,x + \cos x = \frac{1}{5}$, determine $A = \text{sen}\,x \cdot \cos x$. $A = -\frac{12}{25}$

Resolução:

$\text{sen}\,x + \cos x = \frac{1}{5} \rightarrow$ elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \rightarrow \text{sen}^2\,x + \cos^2 x + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = \frac{1}{25} \rightarrow$

$\rightarrow 1 + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = \frac{1}{25} \rightarrow 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$

$A = \text{sen}\,x \cdot \cos x = -\frac{12}{25}$

$\therefore A = -\frac{12}{25}$

92 Se $\text{tg}\,x = 4$, determine $y = \frac{1}{\cos^2 x}$. $y = 17$

Resolução:

$y = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2\,x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2\,x + 1$

Como $\text{tg}\,x = 4$, $\text{tg}^2\,x = 16$. Então:

$\text{tg}^2\,x + 1 = 16 + 1 = 17$

$\therefore y = 17$

93 Determine o valor da expressão: $A = (\text{sen}\,x - \cos x)^2 + (\text{sen}\,x + \cos x)^2$. $A = 2$

Resolução:

$A = (\text{sen}\,x - \cos x)^2 + (\text{sen}\,x + \cos x)^2$

$A = \text{sen}^2\,x + \cancel{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x} + \cos^2 x + \text{sen}^2\,x - \cancel{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x} + \cos^2 x$

Como $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$, temos: $A = 2$.

94 Determine o valor numérico da expressão $y = \dfrac{\text{tg } x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x}$ para $\text{cotg } x = -\dfrac{7}{24}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. $y = \dfrac{25}{24}$

Resolução:

$$y = \frac{\text{tg } x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \text{tg } x \cdot \frac{\cos x}{\text{sen } x \cdot \text{sen } x} = \text{tg } x \cdot \text{cotg } x \cdot \text{cossec } x = \cancel{\text{tg } x} \cdot \frac{1}{\cancel{\text{tg } x}} \cdot \text{cossec } x$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}$$

$\text{cossec } x = \pm\dfrac{25}{24} \rightarrow$ no terceiro quadrante, a cossecante é positiva; logo, $y = \dfrac{25}{24}$.

95 Dado $\sec x = 8$, determine o valor da expressão $y = 2 + \text{sen } x \cdot \text{tg } x + \cos x$. $y = 10$

Resolução:

$$y = 2 + \text{sen } x \cdot \text{tg } x + \cos x$$

$$y = 2 + \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \cos x = 2 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = 2 + \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$y = 2 + \frac{1}{\cos x} = 2 + \sec x = 2 + 8 \rightarrow y = 10$$

96 (Fuvest-SP) A soma das raízes da equação $\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 6π
e) 7π

Resolução:

$\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$

$1 - \cos^2 x - 2\cos^4 x = 0$

Fazendo $\cos^2 x = y$, temos: $2y^2 + y - 1 = 0$.

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = -1 \end{cases}$$

Se $\cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Se $\cos^2 x = -1 \rightarrow$ não existe x

$\text{soma} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi$

97 Resolva a equação $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[\pi, 2\pi[$. $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{2}$

Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$; então, não pertencem ao intervalo $[\pi, 2\pi[$.

Se $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$; então, pertencem ao intervalo $[\pi, 2\pi[$.

Logo, $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

98 (Unemat-MT) Na expressão $\dfrac{\sec^2 x \cdot \cos x - \text{cotg } x \cdot \text{sen } x}{\text{cossec}^2 x \cdot \text{sen } x - \sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x}$, podemos afirmar:

V 1. O numerador é igual a $\text{sen } x \cdot \text{tg } x$.
V 2. O denominador é igual a $\cos x \cdot \text{cotg } x$.
F 3. Podemos dizer que $\dfrac{\sec^2 x \cdot \cos x - \text{cotg } x \cdot \text{sen } x}{\text{cossec}^2 x \cdot \text{sen } x - \sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x} = \text{tg } x$.
F 4. Se considerarmos $\sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x$ isoladamente, então poderemos substituí-la por sen x.
F 5. O numerador é igual ao denominador, portanto a expressão é igual a 1 (um).

Resolução:

$$\frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \text{cotg } x \cdot \text{sen } x}{\text{cossec}^2 x \cdot \text{sen } x - \sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \text{sen } x}{\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} \cdot \text{sen } x - \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos x} - \cos x}{\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen } x}} = \frac{\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\text{cotg } x \cdot \cos x} = \frac{\text{sen } x \cdot \text{tg } x}{\text{cotg } x \cdot \cos x}$$

1. (Verdadeira)
2. (Verdadeira)
3. (Falsa); $\dfrac{\text{sen } x \cdot \text{tg } x}{\text{cotg } x \cdot \cos x} = \dfrac{\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen } x}} = \dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} = \text{tg}^3 x$
4. (Falsa); $\sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x = \text{cotg } x \left(\dfrac{1}{\cos x} + \cos x\right) = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\left(\dfrac{1 + \text{sen}^2 x}{\cos x}\right) = \dfrac{1 + \text{sen}^2 x}{\text{sen } x}$
5. (Falsa)

99 Para que valores de *m* $\text{sen } x = \sqrt{m^2 + 2m + 1}$ e $\cos x = 1$? $m = -1$

Resolução:

Se $\cos x = 1$, $\text{sen } x = 0$; então, $\sqrt{m^2 + 2m + 1} = 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow (m + 1)^2 = 0 \rightarrow m = -1$

100 (Fuvest-SP) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\text{sen}^4\,\alpha - \cos^4\,\alpha = \frac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

Resolução:

$\text{sen}^4\,\alpha - \cos^4\,\alpha = \frac{1}{4}$

$(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha) \cdot (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\,\alpha) = \frac{1}{4}$

$1 - \cos^2\,\alpha - \cos^2\,\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - 2\cos^2\,\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2\,\alpha = \frac{3}{8} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} \rightarrow$

cosseno positivo, pois pertence ao primeiro quadrante.

$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\,\alpha$

$1 - \frac{6}{16} \rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} \rightarrow$ seno também positivo.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

101 (UFAM) Associe as expressões equivalentes das duas colunas e assinale a alternativa correspondente à associação correta.

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}$ — (1) $\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$

(B) $\sec x$ — (2) $\text{tg}^2 x + 1$

(C) $\sec^2 x - 1$ — (3) 1

(D) $\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x$ — (4) $\text{tg}^2 x$

a) A2, B1, C3, D4

b) A3, B1, C4, D2

c) A2, B3, C4, D1

d) A2, B1, C4, D3

e) A2, B4, C1, D3

Resolução:

(1) $\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \rightarrow$ (B)

(2) $\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow$ (A)

(3) $\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 \rightarrow$ (D)

(4) $\sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x \rightarrow$ (C)